

## УЧЕБНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

Ляпцев А. В.<sup>1</sup>, доктор физико-математических наук, ✉ [upm\\_eno@mail.ru](mailto:upm_eno@mail.ru)

<sup>1</sup>Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, набережная реки Мойки, д. 48, 191186, Санкт-Петербург, Россия

### Аннотация

Предлагается учебная модель, описывающая экономические циклы, за основу которой взята известная модель Гудвина. Описывается модификация модели с целью возможности постановки численного эксперимента при обучении моделированию с использованием компьютера. Показано, что численные результаты, полученные при использовании предлагаемой модели, хорошо соответствуют аналитическому анализу свойств модели Гудвина, который обычно приводится в литературе.

**Ключевые слова:** компьютерное моделирование, математическая модель, моделирование экономических процессов.

**Цитирование:** Ляпцев А. В. Учебная модель экономических циклов // Компьютерные инструменты в образовании. 2021. № 3. С. 5-16. doi: 10.32603/2071-2340-2021-3-5-16

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математическое моделирование стало одним из основных методов научных исследований. Соответственно обучение математическому моделированию входит в образовательные программы различных вузов. Наиболее просто обучение построению математических моделей с использованием вычислительных методов можно проводить на примере физических задач. Это связано с тем, что все физические явления или процессы, изучаемые на различном уровне физического образования, так или иначе описываются математическими моделями. Соответственно при обучении математическому моделированию с использованием компьютера нужно только преобразовать практически готовую математическую модель к форме, удобной для исследования численными методами [1]. При этом полноценное исследование самой модели может быть проведено только с использованием как численных, так и аналитических методов [2, 3].

Обучение построению и исследованию моделей, связанных с другими областями научных исследований, как естественнонаучными, так и гуманитарными, является более сложной задачей, поскольку с использованием математических методов при изучении соответствующих дисциплин учащихся практически не знакомят на уровне школьного образования. Примеры математических моделей, относящиеся к естественнонаучным проблемам, которые можно использовать при обучении математическому моделированию, можно найти в учебном пособии [4] (см. также статью [5]). Сложнее дело обстоит при знакомстве учащихся с моделями в области гуманитарных исследований. Знакомство с математическими моделями в экономике требует освоения соответствующих ву-

зовских дисциплин (см., например, [6]). С некоторыми интересными моделями, иллюстрирующими идеи синергетики в применении к экономическим и социальным явлениям, можно познакомиться в книге [7]. На наш взгляд, ряд подобных моделей можно успешно использовать при обучении математическому моделированию. Однако анализ моделей, приведенный в вышеуказанной книге, основан на аналитических методах исследования уравнений, что требует определенной математической подготовки от учащихся. Исследование подобных моделей численными методами требует определенной адаптации моделей.

В данной статье предлагается некоторая модификация одной из основополагающих экономических моделей — модели Гудвина, описывающей циклы в экономике, для использования её в качестве учебной модели при обучении математическому моделированию с использованием вычислительных методов. Знакомство с такой моделью студентов, не изучающих экономические дисциплины, позволит, помимо освоения методов моделирования получить представление о том, что экономические циклы такое же обыкновенное и неизбежное явление нашей жизни, как завывание бури (см. А. С. Пушкин), поскольку оба явления представляют собой автоколебания, возникающие в сложных системах различной природы.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В основе модели лежат переменные, описывающие производство —  $Y$  и потребление —  $C$ , связанные между собой соотношением:

$$C = \alpha Y + \beta. \quad (1)$$

Константа  $\alpha$  характеризует пропорциональность между производством и потреблением ( $\alpha < 1$ ), а константа  $\beta$  — потребление в отсутствие производства (охота, собирательство и т. д.). Еще одна переменная  $K$  описывает основной капитал, который включает заводы, оборудование и т. д. Капитал пополняется в процессе производства, что может быть описано уравнением:

$$Y = C + I. \quad (2)$$

Здесь переменная  $I$ , называемая инвестициями, является производной по времени от величины  $K$  (далее мы используем стандартное обозначение для производной по времени — точку над переменной):

$$\dot{K} = I. \quad (3)$$

Исключая переменную  $C$  из уравнений (1) и (2), приходим к уравнению:

$$Y = \frac{I + \beta}{1 - \alpha}. \quad (4)$$

Два уравнения (3) и (4) связывают три переменные:  $K$ ,  $Y$  и  $I$ . Третье уравнение может быть получено тем или иным способом из основной идеи модели Гудвина о том, что владельцы капитала через посредство изменения инвестиций стремятся управлять капиталом так, чтобы капитал был адекватен производству. Эта адекватность на математическом языке описывается уравнением:

$$K = \gamma Y, \quad (5)$$

где  $\gamma$  — некоторая константа. В общем случае это означает, что инвестиции следует уменьшать при  $K > Y$  и увеличивать в случае противоположного неравенства. Кроме того, следует учитывать определенную ограниченность в стремлении управлять

капиталом. Даже если ничего не вкладывать в добавление капитала, он уменьшается вследствие амортизации оборудования. Это означает, что величина  $I$  ограничена снизу некоторым отрицательным значением  $I_{\min}$ . Из общих соображений можно понять, что эта величина также ограничена сверху некоторым значением  $I_{\max}$ . Всё это можно написать в виде математического соотношения:

$$I = f(K - \gamma Y), \quad (6)$$

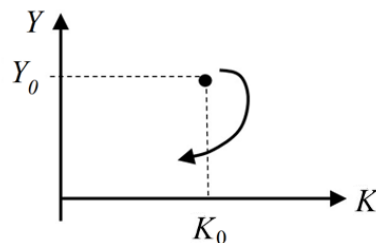
где  $f$  — некоторая функция, которая удовлетворяет вышеописанным свойствам, то есть уменьшается с увеличением аргумента и ограничена снизу и сверху.

Разные виды моделей, возникающие при том или ином способе моделирования функции  $f$ , описаны в книге [7]. Для аналитического исследования уравнений, например, удобно моделировать эту функцию в виде скачкообразного изменения в диапазоне от  $I_{\min}$  до  $I_{\max}$ , так чтобы между скачками значение  $I$  было постоянным. Для численных расчетов, когда решается система дифференциальных уравнений, удобны модели с гладкими функциями, конкретный вид которых будет приведен далее.

Из уравнений (3), (4) и (6) следует, что существуют некоторые стационарные значения  $K_0$  и  $Y_0$ , при которых с течением времени все переменные остаются постоянными, причем  $I_0 = 0$ . Несложные вычисления дают значения:

$$Y_0 = \frac{\beta}{1 - \alpha}, \quad K_0 = \frac{\gamma\beta}{1 - \alpha}. \quad (7)$$

Если изображать состояние системы на фазовой диаграмме, откладывая по горизонтальной оси величину  $K$ , а по вертикальной — величину  $Y$ , то это состояние можно изобразить точкой (рис. 1).



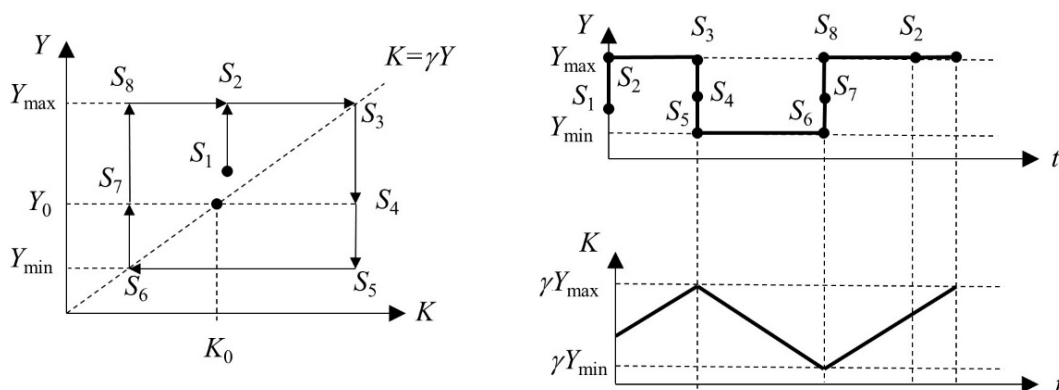
**Рис. 1.** Эволюция системы на фазовой диаграмме при начальном значении, близком к стационарному состоянию

Однако, как показывает анализ модели, стационарное состояние является неустойчивым. Если начальное состояние системы характеризуется некоторой точкой вблизи точки стационарного состояния, то с течением времени система отдаляется от стационарного состояния, и начинаются колебания.

Разные виды моделей, возникающие при том или ином способе моделирования функции  $f$ , описаны в книге [7]. Для аналитического исследования уравнений, например, удобно моделировать эту функцию в виде скачкообразного изменения в диапазоне от  $I_{\min}$  до  $I_{\max}$  так, чтобы между скачками значение  $I$  было постоянным. То есть функция  $f(K - \gamma Y)$  выбирается в виде:

$$f(K - \gamma Y) = \begin{cases} I_{\min}, & K > \gamma Y, \\ I_0, & K = \gamma Y, \\ I_{\max}, & K < \gamma Y. \end{cases}$$

Возникновение циклов для такой простейшей модели (модель 1 в терминологии книги [7]) можно описать на качественном уровне, используя простейшие графические построения, изображенные на рисунке 2.



**Рис. 2.** Графики циклов в простейшей модели Гудвина. Слева – фазовая диаграмма, справа — зависимость от времени

Фазовая плоскость на левом рисунке разделена пунктирной линией  $K = \gamma Y$  на две области. Над этой линией  $K < \gamma Y$ , то есть имеет место недостаток капитала, и наоборот, под линией находится область избыточного капитала. Предположим, что в начальный момент времени система находится в некотором состоянии  $S_1$ , отличном от стационарного состояния. Поскольку это состояние лежит в области недостаточного капитала, функция  $f(K - \gamma Y)$  принимает максимальное значение, и состояние системы мгновенно переходит в  $S_2$ , соответствующее максимально возможному объему производства. Поскольку значение инвестиций положительно, капитал начинает возрастать линейно во времени, и состояние системы постепенно сдвигается в точку  $S_3$ . В этой точке значение инвестиций падает до значения  $I_0$ , в результате чего система мгновенно перемещается в состояние  $S_4$ . Это состояние находится в области избыточного капитала, так что инвестиции падают мгновенно до минимального отрицательного значения. Соответственно объем производства становится минимальным, то есть система переходит в состояние  $S_5$ . При отрицательном значении инвестиций капитал начинает убывать линейно со временем, и система плавно сдвигается в состояние  $S_6$ . В этой точке инвестиции мгновенно принимают значение  $I_0$ , и система мгновенно смещается в состояние  $S_7$ . Это состояние соответствует недостаточному капиталу, так что инвестиции мгновенно принимают максимальное значение, а система мгновенно смещается в состояние  $S_8$ . Далее капитал начинает возрастать линейно со временем, и система переходит вначале в состояние  $S_2$ , завершая цикл, а затем уходит в  $S_3$  на новый цикл.

Развитие переменных во времени может быть легко восстановлено из вышеприведенных рассуждений (правый рисунок).

Несложно показать, что система выходит на один и тот же циклический процесс при любом начальном состоянии.

Естественно, приведенная выше простейшая модель не является привлекательной, поскольку содержит скачкообразные изменения переменных. Возможные усложнения модели приводят к существенным трудностям при аналитическом анализе решений (см. [7]). В денном случае оказывается, что численное решение уравнений после некоторых преобразований дает возможность гораздо более простого исследования уравнений.

Для численных расчетов, когда решается система дифференциальных уравнений удобны модели с гладкими функциями  $f(K - \gamma Y)$ , конкретный вид которых будет приведен далее. Перед проведением численных расчетов следует еще несколько усложнить модель. Из уравнения (4) следует, что изменения инвестиций мгновенно приводят к изменению производства. В реальности изменения производства несколько запаздывают по сравнению с изменениями инвестиций (см. [7]), так что, вместо соотношения (4), получим:

$$Y(t + \Delta t) = \frac{I(t) + \beta}{1 - \alpha},$$

где  $\Delta t$  — некоторый малый параметр. Предполагая, что  $\Delta t$  — малая величина, можно разложить левую часть равенства по степеням  $\Delta t$  и ограничиться первым членом разложения. В результате получаем уравнение:

$$\dot{Y}(t)\Delta t + Y(t) = \frac{I(t) + \beta}{1 - \alpha}. \quad (8)$$

Аналогично из формулы (6) следует, что изменения величин  $K$  и  $Y$  мгновенно сказываются на изменении величины  $I$ . Однако владельцу капитала необходимо некоторое время  $\Delta t_1$  для принятия решения об изменении инвестиций. Повторяя аналогичные действия, переходим от уравнения (6) к уравнению:

$$\dot{I}(t)\Delta t_1 + I(t) = f(K(t) - \gamma Y(t)), \quad (9)$$

где  $\Delta t_1$  — малый параметр.

Уравнения (3), (8) и (9) при заданной каким-либо соотношением функции  $f$  образуют систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, которую можно записать в традиционном виде:

$$\begin{cases} \dot{K} = I, \\ \dot{Y} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{I + \beta}{1 - \alpha} - Y \right), \\ \dot{I} = \frac{1}{\Delta t_1} (f(K - \gamma Y) - I). \end{cases} \quad (10)$$

Численное исследование этой системы уравнений затруднено слишком большим числом параметров, которые так или иначе нужно задавать при численном моделировании. Уменьшение числа параметров достигается сдвигом и масштабированием переменных. Поскольку у учащихся подобные действия часто вызывают определенные затруднения, проведем соответствующие выкладки подробно.

1. Сдвигом переменных  $K$  и  $Y$  переходим к переменным, в которых стационарная точка перемещается в начало координат:

$$\begin{cases} K_1(t) = K(t) - K_0, \\ Y_1(t) = Y(t) - Y_0, \\ I_1(t) = I(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{K}_1 = I_1, \\ \dot{Y}_1 = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{I_1}{1 - \alpha} - Y_1 \right), \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{\Delta t_1} (f(K_1 - \gamma Y_1) - I_1). \end{cases}$$

2. Изменяем масштаб переменных  $Y_1$  и  $I_1$ :

$$\begin{cases} K_2 = K_1, \\ Y_2 = \gamma Y_1, \\ I_2 = \frac{\gamma}{1-\alpha} I_1, \\ f_2 = \frac{\gamma}{1-\alpha} f, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{K}_2 = \frac{1-\alpha}{\gamma} I_2, \\ \dot{Y}_2 = \frac{1}{\Delta t} (I_2 - Y_2), \\ \dot{I}_2 = \frac{1}{\Delta t_1} (f_2(K_2 - Y_2) - I_2). \end{cases}$$

Функция  $f_2$ , как и функция  $f$ , убывает с увеличением аргумента и ограничена величинами:

$$f_{\max} = \frac{\gamma}{1-\alpha} I_{\max}, \quad f_{\min} = \frac{\gamma}{1-\alpha} I_{\min}. \quad (11)$$

3. Изменяем масштаб времени так, чтобы упростить первое уравнение  $t_1 = t/t_0$ , где  $t_0 = \frac{\gamma}{1-\alpha}$ , в результате система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{K}_2 = I_2, \\ \dot{Y}_2 = \frac{t_0}{\Delta t} (I_2 - Y_2), \\ \dot{I}_2 = \frac{t_0}{\Delta t_1} (f_2(K_2 - Y_2) - I_2). \end{cases}$$

Точками над буквами здесь обозначены производные по новой переменной  $t_1$ .

4. Функция  $f_2$  должна содержать ограничительные параметры, причем минимальное значение является отрицательным. Вместо этих двух параметров введем следующие:

$$\delta = f_{\max} + |f_{\min}|, \quad \mu = |f_{\min}|/f_{\max} = |I_{\min}|/I_{\max}.$$

В этих обозначениях функция  $f_2$  ограничена сверху значением  $\delta/(1+\mu)$  и снизу — значением  $-\delta\mu/(1+\mu)$ . Для дальнейшего уменьшения числа параметров сделаем ещё одно масштабное преобразование:

$$\begin{cases} K_3 = K_2/\delta, \\ Y_3 = Y_2/\delta, \\ I_3 = I_2/\delta, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{K}_3 = I_3, \\ \dot{Y}_3 = \frac{t_0}{\Delta t} (I_3 - Y_3), \\ \dot{I}_3 = \frac{t_0}{\Delta t_1} (f_3(K_3 - Y_3) - I_3), \end{cases}$$

где  $f_3(K_3 - Y_3) = \frac{1}{\delta} f_2\left(\frac{1}{\delta}(K_2 - Y_2)\right)$  — функция, убывающая с ростом аргумента и ограниченная сверху и снизу значениями  $\frac{1}{1+\mu}$  и  $\frac{-\mu}{1+\mu}$  соответственно.

Несложно заметить, что в полученной системе уравнений помимо параметров, которые могут содержаться в функции  $f_3$ , остается всего два параметра:  $\tau = \Delta t/t_0$ ,  $\theta = \Delta t_1/t_0$ . Чтобы не загромождать формулы, опустим далее индексы 3 у переменных и функции  $f_3$ , так что система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{K} = I, \\ \dot{Y} = \frac{1}{\tau} (I - Y), \\ \dot{I} = \frac{1}{\theta} (f(K - Y) - I). \end{cases} \quad (12)$$

Для дальнейших расчетов нужно выбрать модель для функции  $f(K - Y)$ . Она должна убывать с ростом  $K - Y$  и обращаться в ноль при нулевом значении этой величины. Кроме того, эта функция должна быть ограничена снизу отрицательным значением  $-\mu/(1 + \mu)$  и сверху положительным значением  $1/(1 + \mu)$ . Простейшей такой функцией является функция, график которой имеет вид ломаной линии (функция  $f_0$  на рис. 3).

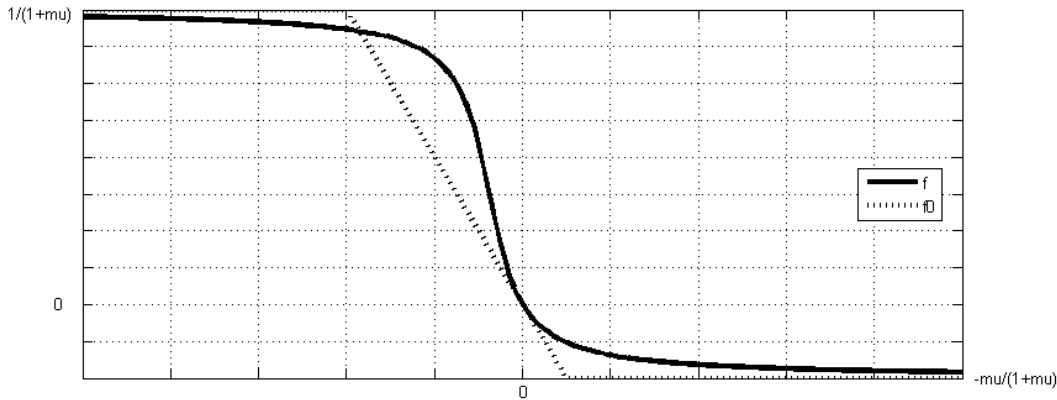


Рис. 3. Различные модели для функции  $f(K - Y)$

Для аналитического анализа решений подобные кусочно-линейные функции часто оказываются удобными. Однако при численном решении системы дифференциальных уравнений при помощи стандартных процедур, имеющихся в таких вычислительных средах, как MatLab, Octave, Maple, подобные функции вызывают сложности при вычислениях, так что при моделировании целесообразно пользоваться некоторыми гладкими функциями с аналогичными свойствами. В частности, аналогом функции  $f_0$ , изображенной на рис. 3, является функция, за основу которой взята функция  $\text{arctg}(x)$ . Подобная функция содержит два параметра, в качестве которых можно выбрать вышеопределенный параметр  $\mu$  и параметр  $\lambda$  — модуль тангенса наклона кривой в начале координат. При такой параметризации функция  $f(K - Y)$  принимает вид:

$$f(K - Y) = \frac{1}{\pi} \left[ \text{arctg}(\rho) - \text{arctg}(\lambda \pi (1 + \rho^2)(K - Y) + \rho) \right], \quad (13)$$

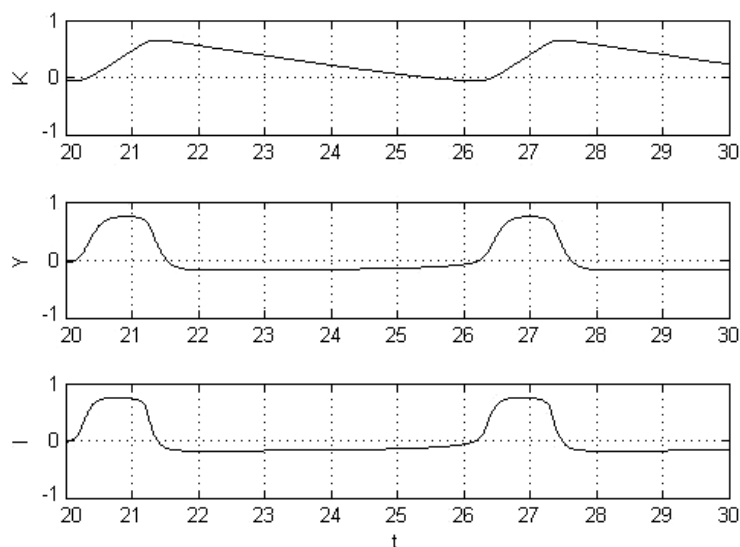
$$\text{где } \rho = \text{tg} \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right).$$

### 3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ

Как уже говорилось, при численном решении системы дифференциальных уравнений удобно использовать процедуры, входящие в такие вычислительные среды, как MatLab, Octave, Maple. Эти среды имеют довольно большой набор соответствующих процедур, различающихся некоторыми деталями. Для данной задачи годится любая из этих процедур. В частности, все нижеприведенные результаты получены при использовании наиболее часто употребляемой процедуры `ode45`.

Четыре параметра модели  $\tau$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  имеет довольно ясный смысл. Параметр  $\tau$  определяет сдвиг по времени между изменением инвестиций и изменением производства. Параметр  $\theta$  — сдвиг по времени перед принятием решения об изменении инвестиций после анализа состояния системы. Параметр  $\lambda$  — стремление управлять капиталом. Па-

параметр  $\mu$  — отношение возможной убыли капитала вследствие амортизации оборудования к восстановлению капитала вследствие максимально возможных инвестиций. В соответствии с идеей модели Гудвина, это отношение меньше единицы [7]. Небольшое число параметров позволяет провести некоторое исследование модели на основе численного эксперимента. В подобных моделях, когда отсутствуют какие-либо соображения по приблизительным величинам параметров и переменных, целесообразно выделить малые параметры, которые положить принимающими значения от 0,01 до 0,1, а остальные параметры положить равными нескольким единицам, или, если параметр по смыслу меньше единицы, — нескольким десятым. Уже при простейшем наборе параметров  $\tau = \theta = 0,1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 0,25$  и при любом значении начальных условий для переменных  $K, Y, I$  спустя время порядка  $\tau$  решения системы уравнений (12), (13) становятся периодическими (рис. 4). Примечательно, что полученные численные решения близки к тому, что дает простейшая модель Гудвина, в которой инвестиции  $I$  изменяются скачками от минимального до максимального значения, а графики зависимости  $K(t)$  имеют пилообразную форму. Из графиков, приведенных на рисунке, также видно, что зависимость производства от времени ( $Y$ ) повторяет зависимость инвестиций по времени, сдвинутую на величину порядка  $\tau$ .



**Рис. 4.** Результаты численного расчета системы уравнений (12), (13) при значениях параметров:  $\tau = \theta = 0,1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 0,25$

Дальнейшие численные исследования модели показывают, что она является достаточно устойчивой при изменении параметров. Периодические процессы сохраняются при увеличении параметра  $\lambda$  по крайней мере, до 1000. Однако уменьшение этого параметра до значения  $\lambda < 1$  приводит к затуханию колебаний и переходу системы в состояние с  $K = Y = I = 0$ . Этот факт может быть самостоятельно обоснован учащимися аналитически путем линеаризации уравнений (12), (13) вблизи данной стационарной точки. Функция  $f$  при малых значениях  $K$  и  $Y$  становится линейной функцией:  $f(K - Y) \approx -\lambda(K - Y)$ , и система уравнений становится линейной. Для дальнейшего упрощения можно приближенно положить  $I(t) \approx Y(t)$ , в результате чего система описывается двумя уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{K} = I, \\ \dot{I} = -\frac{1}{\theta}(\lambda(K - I) - I). \end{cases}$$



Эта система уравнений может быть преобразована к дифференциальному уравнению 2-го порядка:

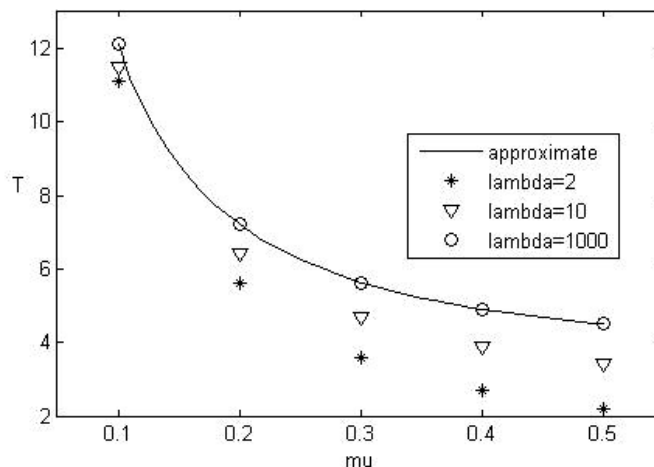
$$\ddot{I} + \frac{1-\lambda}{\theta} \dot{I} + \frac{\lambda}{\theta} I = 0.$$

Полученное уравнение хорошо знакомо тем, кто изучал колебания в курсе физики. При  $1 - \lambda > 0$  оно описывает затухающие колебания. Напротив, при  $1 - \lambda < 0$  амплитуда колебаний экспоненциально разрастается, в результате чего при любом малом значении начальных условий возникают автоколебания, подобные автоколебаниям в физических системах. Модели автоколебаний в физических системах, доступные при углубленном изучении физики в школе, приведены в учебном пособии [3].

Численный эксперимент показывает, что зависимости  $Y(t)$  и  $I(t)$  становятся все более похожими на прямоугольники при больших значениях  $\lambda$  и малых значениях  $\tau$  и  $\theta$ . В этом случае анализ решений можно в некотором приближении провести аналитическими методами. При большом параметре  $\lambda$ , то есть при большом угле тангенса наклона при нулевом значении  $K - Y$ , время перехода функции  $f$  между минимальным и максимальным значениями оказывается мало. Следовательно,  $I$  и соответственно  $Y$  принимают значения  $1/(1 + \mu)$ , или  $-\mu/(1 + \mu)$  с резкими скачками между этими значениями. Если значение  $I$  равно  $1/(1 + \mu)$ , то функция  $K(t)$  возрастает и, когда аргумент функции  $f$  обращается в ноль, то есть при достижении  $K$  значения  $1/(1 + \mu)$ , происходит скачок функции  $I$  вниз до значения  $-\mu/(1 + \mu)$ . После этого  $K$  начинает уменьшаться по линейному закону до тех пор, пока не достигнет значения  $-\mu/(1 + \mu)$ . Далее  $I$  скачком изменяется до значения  $1/(1 + \mu)$ , и  $K$  снова начинает увеличиваться по линейному закону. Несложно понять, что время изменения  $K$  от минимума до максимума равно величине, обратной  $1/(1 + \mu)$ , то есть равно  $1 + \mu$ . Время движения от максимума до минимума равно величине, обратной  $\mu/(1 + \mu)$ , то есть  $(1 + \mu)/\mu$ . Складывая эти величины, получим значение периода колебаний в этом предельном случае:

$$T = \frac{(1 + \mu)^2}{\mu}. \quad (14)$$

На рисунке 5 приведены рассчитанные значения периода при значениях параметров  $\tau = \theta = 0,01$ . Сплошная линия — расчет по формуле (14).



**Рис. 5.** Численный расчет периода колебаний при различных значениях параметра  $\lambda$  в сравнении с приближенным аналитическим расчетом

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье мы не ставили задачу подробного исследования различных зависимостей от параметров задачи. Целью работы было предложить адаптацию модели экономических циклов Гудвина для возможности её исследования учащимся в рамках изучения математического моделирования с использованием компьютера. Реализация модели дает большой простор для исследований учащимися свойств модели. Можно, например, сформулировать следующие задачи:

- 1) построение фазовых диаграмм, в частности в трехмерном фазовом пространстве переменных  $K, Y, I$ ;
- 2) исследование формы и параметров колебаний в зависимости от параметров задачи;
- 3) расчеты с другой возможной гладкой функцией  $f(K - I)$ , обладающей теми же свойствами, что и предложенная выше функция.

Наконец, для учащихся, имеющих достаточную математическую подготовку, можно предложить использовать кусочно-линейную функцию  $f(K - I)$ . В этом случае можно выделить области переменных, в каждой из которых система уравнений становится линейной. Следовательно решение в каждой области может быть получено в аналитическом виде с последующим сшиванием решений. Заметим, что, даже, если этот процесс не будет доведен до конца, учащиеся получают представление, что нахождение численных решений требует гораздо меньших трудозатрат, чем нахождение аналитических решений.

Вполне естественно, что подобные упрощенные модели не описывают всех деталей реальных экономических циклов. Однако сама модель Гудвина может служить отправной моделью для более сложных и детальных исследований (см., например, [8, 9]).

С мировоззренческой точки зрения модель Гудвина эквивалентна другим моделям, описывающим автоколебания различных систем. Как показывает данная модель, возникновение автоколебаний в экономике происходит из-за желания управлять капиталом. В модели «величина желания управлять» характеризуется параметром  $\lambda$ . Автоколебания возникают, когда это желание достаточно велико. Заметим, что простое соотношение для условия возникновения автоколебаний  $\lambda > 1$  получается после масштабного преобразования переменных. Если вернуться к переменным  $K, Y$  и  $I$  до проведения масштабных преобразований, то критерием возникновения автоколебаний является соотношение  $\lambda > 1/\gamma$ .

#### Список литературы

1. Глазков В. В., Кондратьев А. С., Ляпцев А. В. Математическое моделирование при изучении физики // Физическое образование в ВУЗах. 2007. Т. 13, № 4. С. 38–52.
2. Кондратьев А. С., Ляпцев А. В. Математическое моделирование: аналитические и вычислительные методы // Компьютерные инструменты в образовании. 2007. № 5. С. 20–24.
3. Кондратьев А. С., Ляпцев А. В. Физика. Задачи на компьютере. М.: Физматлит, 2008.
4. Бордовский Г. А., Кондратьев А. С., Чоудери А. Физические основы математического моделирования: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. 2-е издание, исправленное и дополненное. М.: Юрайт, 2019. 319 с.
5. Трубецков Д. И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 2. С. 69–88. doi: 10.18500/0869-6632-2011-19-2-69-88

6. Цыганова М. С. Моделирование экономических процессов и систем. М.: Проспект, 2017. 232 с.
7. Трубецков Д. И. Введение в синергетику: хаос и структуры. Издание 5-е, исправленное. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. 240 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).
8. Lorenz H. W. Nonlinear dynamical economics and chaotic motion, 2nd ad. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1993.
9. Башкирцева И. А., Екатеринчук Е. Д., Рязанова Т. В., Сысолятина А. А. Математическое моделирование стохастических равновесий и бизнес-циклов модели Гудвина // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5, № 1. С. 107–118. doi: 10.20537/2076-7633-2013-5-1-107-118

Поступила в редакцию 19.08.2021, окончательный вариант — 23.09.2021.

**Ляпцев Александр Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры методики обучения физике РГПУ им. А. И. Герцена, ✉ [upm\\_eno@mail.ru](mailto:upm_eno@mail.ru)**

Computer tools in education, 2021

№ 3: 5–16

<http://cte.eltech.ru>

doi:10.32603/2071-2340-2021-3-5-16

## Educational Model of Economic Cycles

Liapzev A. V.<sup>1</sup>, PhD, professor, ✉ [upm\\_eno@mail.ru](mailto:upm_eno@mail.ru)

<sup>1</sup> Herzen State Pedagogical University of Russia,  
Moika river embankment, 48, 191186, Saint Petersburg, Russia

### Abstract

A training model describing economic cycles, based on the well-known Goodwin model is proposed. The modification of the model is described, that allow to use it to carry out numerical experiment in teaching course of modeling with the help of computer. It is shown that the numerical results obtained using the proposed model correspond well to the analytical analysis of the properties of the Goodwin model, which is usually given in the literature.

**Keywords:** *computer modeling, mathematical model, modeling of economic processes.*

**Citation:** A. V. Liapzev, "Educational Model of Epidemic Development," *Computer tools in education*, no. 3, pp. 5–16, 2021 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340- 2021-3-5-16

### References

1. V. V. Glazkov, A. S. Kondratyev, and A. V. Lyaptsev, "Mathematical modeling at physics studying," *Fizicheskoe Obrazovanie v VUZah*, vol. 13, no. 4, pp. 38–52, 2007 (in Russian).
2. A. S. Kondrat'ev and A. V. Lyaptsev, "Matematicheskoe modelirovanie: analiticheskie i vychislitel'nye metody" [Mathematical modeling: analytical and computational methods], *Computer Tools in Education*, no. 5, pp. 20–24, 2007 (in Russian).
3. A. S. Kondrat'ev and A. V. Lyaptsev, *Fizika. Zadachi na komp'yutere* [Physics. Tasks on the computer], Moscow: Fizmatlit, 2008 (in Russian).

4. G. A. Bordovskii, A. S. Kondrat'ev, A. Chouderi, *Fizicheskie osnovy matematicheskogo modelirovaniya: uchebnik i praktikum dlya bakalavriata i magistratury* [Physical foundations of mathematical modeling: a textbook and workshop for undergraduate and graduate programs], Moscow: Yurait, 2019 (in Russian).
5. D. I. Trubetskov, "Phenomenon of lotka-volterra mathematical model and similar models," *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 19, no. 2, pp. 69–88, 2011 (in Russian); doi: 10.18500/0869-6632-2011-19-2-69-88
6. M. S. Tsyganova, *Modelirovanie ekonomicheskikh protsessov i sistem* [Modeling of economic processes and systems], Moscow.: Prospekt, 2017 (in Russian).
7. D. I. Trubetskov, *Vvedenie v sinergetiku: khaos i struktury* [Introduction to Synergetics: Chaos and Structures], Moscow.: Knizhnyi dom LIBROKOM, 2014 (in Russian). (Синергетика: от прошлого к будущему).
8. H. W. Lorenz, *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, 2nd ed., Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1993.
9. I. A. Bashkirtseva, E. D. Ekaterinchuk, T. V. Ryazanova, and A. A. Sysolyatina, "Mathematical modeling of stochastic equilibria and business cycles of goodwin model," *Computer Research and Modeling*, vol. 5, no. 1, pp. 107–118, 2013 (in Russian); doi: 10.20537/2076-7633-2013-5-1-107-118

*Received 19-08-2021, the final version — 23-09-2021.*

**Alexander Liapzev, PhD, professor of the Department of methods of teaching physics at Herzen University, ✉ [upm\\_eno@mail.ru](mailto:upm_eno@mail.ru)**